Stationäre Verteilung und lineare Algebra

Aufgabe 1 Eine stationäre Verteilung einer Zufallsmatrix ist ein spezieller Fall eines *Eigenvektors* von Matrizen einer linearen Abbildung. Hier wird der allgemeine Fall untersucht.

> **Hinweis.** A sei eine Matrix. Ein Vektor $\vec{v}$ heißt **Eigenvektor** von A, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, für das $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ gilt. λ nennt man den **Eigenwert** zum Eigenvektor $\vec{v}$.

a) Zeigen Sie mithilfe der Matrizen aus den Beispielen 4 und 5, dass eine stationäre Verteilung $\vec{\pi}$ ein Eigenvektor der zugehörigen Übergangsmatrix P ist. Wie groß ist der Eigenwert?

b) Beweisen Sie: Ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor einer Matrix A mit Eigenwert λ, so ist jeder Vektor $\vec{w} = k \cdot \vec{v}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

c) Berechnen Sie mit dem ClassPad die Eigenvektoren und Eigenwerte der Verteilungen der Beispiele 4 und 5 und der „Telefonmatrix" und erklären Sie das Ergebnis:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

> **Hinweis.** Eigenvetoren und Eigenwerte können mithilfe des ClassPad berechnet werden. Dabei helfen unter `Aktion` → `Matrix` → `Berechnungen` die Befehle
> `eigVc` und `eigVl` (Ausgabe von Eigenvektoren und -werten)
>
> Das Ergebnis von `eigVr(P)` ist so zu verstehen, dass die Spalten gleich den Eigenvektoren sind. Die Eigenvektoren stehen in derselben Reihenfolge wie die zugehörigen Eigenwerte.